



Telkom University

VTI1H3-

SISTEM DIGITAL

Kuliah #5

TEKNIK PENYEDERHANAAN RANGKAIAN DIGITAL (K-MAP)

Denny Darlis

Program Studi D3 Teknologi Telekomunikasi

Fakultas Ilmu Terapan - Universitas Telkom

Semester Genap 2020/2021

Tujuan Perkuliahan

- Mengetahui konsep dasar minimisasi dengan bantuan K-Map
- Mengetahui aturan penggabungan sel
- Mampu memilih gabungan yang paling sederhana
- Mengetahui keterbatasan kemampuan K-Map dalam proses minimisasi

Outline

- Tujuan Perkuliahan
- Ulas balik Aljabar Boole
- Apakah K-Map itu?
(ulas balik Tabel Kebenaran)
- Pendahuluan
- Pemetaan
- Penggabungan sel
- Pemilihan gabungan
- Permasalahan
- *Don't Care*
- *SOP* dan *POS*
- Keterbatasan kemampuan K-Map
- Soal-soal K-Map



Ulas balik penyederhanaan dengan teorema-teorema Aljabar Boole

- Seperti pemecahan soal-soal Aljabar biasa, tidak dapat dipastikan persamaan yang kita peroleh sudah merupakan persamaan minimum, apalagi untuk persamaan dengan jumlah Masukan lebih dari 3 buah, kecuali bila hasil akhir terdiri dari 1 atau 2 suku saja



Ulas balik Aljabar Boole (lanjutan)

- Kesulitan dalam memanfaatkan teorema yang tersedia, misalkan teorema :
 - $x = x + x$
 - De Morgan (untuk suku yang terdiri dari 2 masukan atau lebih)
 - $x + x y = \bar{x} + y$, dlsb
- Minimisasi dengan Aljabar Boole membutuhkan ketelitian penulisan persamaan kanonik secara berulang-ulang

Ulas balik Aljabar Boole (lanjutan)



- Jumlah langkah pengerjaan akan sangat bergantung pada kemampuan memilih teorema.

Sebagai contoh: penyederhanaan sepanjang 10 langkah seharusnya dapat dilakukan dengan 3 langkah saja, hanya dengan memilih teorema yang cocok.



Ulas balik Aljabar Boole (lanjutan)

- Bentuk gabungan 2 suku secara otomatis akan menggantikan (menghilangkan) suku-suku yang digabungkan, kecuali bila salah satu (atau lebih) suku tersebut digandakan dengan teorema

$$X = X + X + \dots$$

Contoh:

Ulas balik Aljabar Boole (lanjutan)

Contoh:

$$F = S1 + S2 + S3$$

$$F = S4 + S3 \quad (S4 = S1 + S2)$$

(sudah tidak dapat disederhanakan lagi)

$$F = S1 + S2 + S3$$

$$F = S1 + S2 + S2 + S3$$

$$F = S4 + S5 \quad (S4 = S1 + S2$$

$$S5 = S2 +$$

$$S3)$$

Jelas terlihat bahwa bentuk yang kedua akan lebih sederhana daripada yang pertama



Kesulitan atau ketidak-pastian ini, dapat diatasi dengan menggunakan K-Map sebagai alat bantu minimisasi.

Minimisasi dengan Peta Karnough (K-Map, berdasar pada pemetaan) dilakukan secara **visual**, tanpa harus memilih sekian banyak **teorema** sebagaimana pada penyederhanaan dengan **Aljabar Boole**



Apakah K-Map itu?

K-Map adalah suatu Peta
(dilengkapi dengan absis dan ordinat)
yang sebetulnya merupakan
perubahan bentuk (modifikasi
tampilan) dari
Tabel Kebenaran
(yang terdiri dari baris dan kolom)





Ulas balik Tabel Kebenaran

- Tabel terdiri dari $m + n$ kolom dan 2^m baris, di mana :
 - m = jumlah Masukan, dan
 - n = jumlah Keluaran (umumnya 1 kolom)
- Tiap baris diisi dengan :
 - Semua kombinasi Masukan (di bawah kolom masukan), dan
 - Level Keluaran, (di bawah kolom Keluaran)

Ulas balik Tabel Kebenaran (lanjutan)

$$\begin{aligned}
 F &= \overline{A}\overline{C} + \overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B} \\
 &= \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} \\
 &\quad + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} \\
 &\quad + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} \\
 &= \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} \\
 &\quad + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}
 \end{aligned}$$

	Masukan			Keluaran
	A	B	C	F
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	1
8	1	1	1	0





Pendahuluan

- Terdiri dari kumpulan sel yang jumlahnya = jumlah kemungkinan kombinasi Masukan ($= 2^m$).
- Untuk 3 buah Masukan (A, B, dan C), akan didapat 2^3 kombinasi Masukan = 8 sel (= 2 x 4 atau 4 x 2).

Sel-sel disusun dalam tabel yang terdiri dari 4 baris x 2 kolom atau 2 baris x 4 kolom.



Pendahuluan (lanjutan)

4 baris x 2 kolom

2 baris x 4 kolom

4 baris x 4 kolom
(untuk 4 buah
Masukan)

Pendahuluan (lanjutan)

- Kombinasi Nilai Masukan yang ditunjukkan oleh sel tersebut dapat dibaca pada angka-angka yang tercantum pada sisi kiri dan sisi atas dari peta Karnough.

$$\text{"0"} > \overline{X}; \text{"1"} > X$$



Pendahuluan (lanjutan)

- Nilai-nilai tersebut disusun sedemikian supaya untuk :
pasangan sel (atau sel-sel) yang bersebelahan (horizontal maupun vertikal) berbeda nilai hanya pada 1 Masukan saja.
- Perhatikan urutan nilai Masukan :

00, 01, 11, 10



Pendahuluan (lanjutan)



F	C	0	1
AB	00		
	01		
	11		
	10		

F	BC	00	01	11	10
A	0				
	1				

4 baris x 4 kolom
(untuk 4 buah
Masukan)

F	CD	00	01	11	10
AB	00				
	01				
	11				
	10				

Pemetaan pada K-Map

- Sebelum dilakukan proses minimisasi pertama-tama harus dipetakan terlebih dahulu nilai-nilai Keluaran pada masing-masing sel
- Tidak boleh ada sel yang kosong, tiap sel harus diisi dengan nilai 0, 1, atau 0 / X (don't care, akan diterangkan kemudian)





Pemetaan pada K-Map (lanjutan)

- Contoh : Sederhanakan persamaan

$$T = \overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{C} \overline{D} + B \overline{C} \overline{D}$$

- Tahap pertama : setiap suku diuraikan sehingga memuat semua Masukan yang ada

$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} = \overline{A} \overline{B} \overline{C} (\overline{D} + D)$$
$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{A} \overline{B} \overline{C} D$$

$$\overline{C} \overline{D} = \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{A} B \overline{C} \overline{D}$$
$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{A} B \overline{C} \overline{D}$$

$$B \overline{C} \overline{D} = \overline{A} B \overline{C} \overline{D} + \overline{A} B \overline{C} \overline{D}$$



Pemetaan pada K-Map (lanjutan)

Sehingga didapat persamaan baru sebagai berikut:

$$T = \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{A} \overline{B} \overline{C} D + \overline{A} \overline{B} C \overline{D} + \overline{A} \overline{B} C D + \overline{A} B \overline{C} \overline{D} + \overline{A} B \overline{C} D + \overline{A} B C \overline{D} + \overline{A} B C D + A \overline{B} \overline{C} \overline{D} + A \overline{B} \overline{C} D + A \overline{B} C \overline{D} + A \overline{B} C D + A B \overline{C} \overline{D} + A B \overline{C} D + A B C \overline{D} + A B C D$$

atau (dalam format 0/1) : $T = 1100 + 1101 + 0010 + 0110 + 1010 + 1110 + 0111 + 1111$

- Tahap kedua : nilai-nilai Keluaran tersebut (atau T=1) kemudian dipetakan pada K-Map. Sel yang kosong diisi dengan nilai 0



Pemetaan pada K-Map (lanjutan)

$$T = 1100 + 1101 + 0010 + 0110 + 1010 + 1110 + 0111 + 1111$$

T		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	0	1
	01	0	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	0	1

Penggabungan sel pada K-Map



- Karena pasangan sel (atau sel-sel) yang bersebelahan berbeda nilai hanya pada 1 Masukan saja, maka pasangan sel (atau sel-sel) tersebut dapat digabungkan

Teorema Aljabar Boole: $X + \bar{X} = 1$

$$\text{jadi : } \bar{A} B \bar{C} D + \bar{A} B C D = \bar{A} B (1) D \\ = \bar{A} B D$$

$$\text{atau : } 0101 + 0111 = 01_1$$

- Perhatikan implementasi persamaan tersebut pada K-Map

Penggabungan sel pada K-Map

Ingat:

Kolom pertama bersebelahan
dengan Kolom terakhir,
baris paling atas bersebelahan
dengan baris paling bawah



Penggabungan sel ... (lanjutan)

- $0101 + 0111 = 01_1$

F		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	0	0
	01	0	1	1	0
	11	0	0	0	0
	10	0	0	0	0





Penggabungan sel ... (lanjutan)

- $0101 + 0111 = 01_1$ atau $= \overline{A} B _ D$
- $1101 + 1111 = 11_1$ atau $= A B _ D$

Apakah 01_1 dan 11_1 dapat digabungkan?

Karena hanya berbeda
1 Masukan, maka

- $01_1 + 11_1 = _1_1$
atau $= B D$

F \ CD	00	01	11	10
AB 00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0



Penggabungan sel ... (lanjutan)

- $0100 + 0101 = 010_ \text{ atau } = \overline{A} B \overline{C} _$
- $0111 + 0110 = 011_ \text{ atau } = \overline{A} B C _$

Apakah $010_ \text{ dan } 011_ \text{ dapat digabungkan?}$

*Karena hanya berbeda
1 Masukan, maka*

- $010_ + 011_ = 01_ _ _$
- *atau* $= \overline{A} B$

		CD			
		00	01	11	10
F	AB				
	00	0	0	0	0
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	0
	10	0	0	0	0



Penggabungan sel ... (lanjutan)

- $0100 + 1100 = _100$ atau = $_ \overline{B} \overline{C} \overline{D}$
- $0110 + 1110 = _110$ atau = $_ \overline{B} \overline{C} \overline{D}$

Apakah $_100$ dan $_110$ dapat digabungkan?

Karena hanya berbeda
1 Masukan, maka

- $_100 + _110 = _1_0$
- atau = $A \overline{D}$

F		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	0	0
	01	1	0	0	1
	11	1	0	0	1
	10	0	0	0	0



Penggabungan sel ... (lanjutan)

- Dengan cara yang sama, gabungan 4 sel dapat digabungkan lagi dengan gabungan 4 sel yang bersebelahan, menjadi gabungan 8 sel
- Demikian juga, gabungan 8 sel dapat digabungkan lagi dengan gabungan 8 sel yang bersebelahan, menjadi gabungan 16 sel, “dan seterusnya”

		CD			
		00	01	11	10
F AB	00	1	1	1	1
	01	1	1	1	1
	11	1	1	1	1
	10	1	1	1	1



Penggabungan sel ... (lanjutan)

- Apakah sel (atau sel-sel) yang sudah masuk dalam satu gabungan, masih boleh digabungkan dengan gabungan sel yang berbeda?
- Sel atau gabungan sel dapat digabungkan berkali-kali berdasarkan teorema:
 $X = X + X + \dots$
- Sebutkan nama-nama gabungan pada K-Map di sebelah ini

F \ CD	00	01	11	10
AB 00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

Penggabungan sel ... (lanjutan)

KESIMPULAN (pemetaan dan penggabungan)

- Berbeda dengan **Aljabar Boole** di mana proses dilakukan berdasarkan pada **teorema** yang telah ditetapkan, pada **K-Map** hal tersebut dilakukan **secara visual**. Hal ini menjadikan K-Map sebagai alat bantu yang sederhana dan mudah dianalisa.
- Penggabungan sel dilakukan mulai dari gabungan yang paling besar (mengapa?), diikuti dengan gabungan yang lebih kecil, untuk sel-sel “1” yang belum masuk dalam gabungan yang telah ada.



Pemilihan gabungan

Pendahuluan

- Karena proses penggabungan ternyata dapat menghasilkan beberapa kemungkinan penggabungan dengan dimensi yang berbeda-beda, dan karena tujuan utama K-Map adalah sebagai alat bantu penyederhanaan persamaan Keluaran, maka proses pemilihan gabungan menjadi sangat penting dan harus dilakukan (proses ini merupakan proses yang dapat menyulitkan pemakaian K-Map)



Pemilihan gabungan (lanjutan)

Proses pemilihan gabungan

- Tahap awal
Sebelum memilih gabungan (yang dimulai dengan pemilihan gabungan yang paling besar), harus dipilih terlebih dahulu gabungan yang memuat sel “1” yang hanya memiliki satu kemungkinan gabungan saja.
- Tahap berikutnya adalah memilih gabungan (yang paling besar) untuk sel-sel “1” yang lain.



Permasalahan yang terjadi

- Kemungkinan diperoleh beberapa kombinasi pilihan gabungan
- Harus diambil kombinasi pilihan dengan jumlah gabungan yang paling sedikit (minimum, proses “minimisasi”)
- Masih mungkin diperoleh beberapa kombinasi pilihan minimum yang sama sederhananya. Dalam hal ini cukup dipilih salah satu saja. (lihat catatan pada slide berikut)



Permasalahan yang terjadi (lanjutan)

Bila diperoleh beberapa kemungkinan kombinasi pilihan yang sama sederhananya, pemilihan berikutnya dapat didasarkan pada implementasi rangkaian :





Permasalahan yang terjadi (lanjutan)

- Ragam Masukan (termasuk komplemennya) yang dapat berpengaruh pada kesederhanaan rangkaian
- Kemungkinan digunakannya Komponen yang sejenis atau sesedikit mungkin jenisnya
- Tersedianya lebih dari 1 buah komponen dalam 1 buah chip IC

Permasalahan yang terjadi (lanjutan)



Contoh soal 1

T		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	0	1
	01	0	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	0	1

$$T = AB + BC + C\bar{D}$$

Perhatikan sel-sel yang mempunyai lebih dari 1 kemungkinan gabungan



Permasalahan yang terjadi (lanjutan)

Contoh soal 2

T		C D			
		00	01	11	10
A B	00	0	1	0	0
	01	0	1	1	1
11	1	1	1	0	
10	0	0	1	0	

Dengan adanya sel-sel yang hanya mempunyai 1 kemungkinan gabungan, mengakibatkan gabungan yang lebih besar (4 sel) tidak diperlukan lagi karena sel-sel yang ada sudah tergabung semua

$$T = \bar{A} \bar{B} C + A B \bar{C} + \bar{A} C D + A C D$$



Permasalahan yang terjadi (lanjutan)

Contoh soal 3

T		C D			
		00	01	11	10
A B	00	0	1	1	0
	01	1	1	1	0
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	1

Kombinasi pilihan manakah yang harus dipilih?

Tentukan terlebih dahulu sel-sel yang hanya mempunyai 1 kemungkinan gabungan dan pilih gabungan dari sel-sel tersebut

Permasalahan yang terjadi (lanjutan)

Contoh soal 3

T A B		C D			
		00	01	11	10
00	0	1	1	0	
01	1	1	1	0	
11	1	1	1	1	
10	0	0	1	1	

Periksa apakah masih ada sel yang belum tercakup pada gabungan tersebut

Bila semua sel sudah tercakup, tuliskan persamaan Keluarannya

T=





Permasalahan yang terjadi (lanjutan)

Contoh soal 4

T A B		C D			
		00	01	11	10
00	1	1	1	0	
01	1	1	1	0	
11	1	1	1	1	
10	0	0	1	1	

Kombinasi pilihan manakah yang harus dipilih?

Tentukan terlebih dahulu sel-sel yang hanya mempunyai 1 kemungkinan gabungan dan pilih gabungan dari sel-sel tersebut



Permasalahan yang terjadi (lanjutan)

Contoh soal 4

T		C D			
		00	01	11	10
A B	00	1	1	1	0
	01	1	1	1	0
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	1

Kombinasi pilihan manakah yang harus dipilih?

Tentukan terlebih dahulu sel-sel yang hanya mempunyai 1 kemungkinan gabungan dan pilih gabungan dari sel-sel tersebut

$$T = \overline{A} \overline{C} + A C + \dots$$



Permasalahan yang terjadi (lanjutan)

Contoh soal 4

T \ C D		A B			
		00	01	11	10
A B	00	1	1	1	0
	01	1	1	1	0
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	1

Kemudian tentukan gabungan dari sel-sel yang belum masuk dalam gabungan yang sudah dipilih.

Gabungan mana saja?

Ada berapa kemungkinan kombinasi pilihan?

Tuliskan semua kemungkinan kombinasi pilihan gabungan tersebut



Permasalahan yang terjadi (lanjutan)

Contoh soal 4

T		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	1	0
	01	1	1	1	0
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	1

Kemungkinan gabungan:

$\bar{A} D$ atau $C D$

$A B$ atau $B \bar{C}$

Dengan memperhatikan
gabungan yang sudah
diperoleh sebelumnya,

$$T = \bar{A} \bar{C} + A C + \dots$$

Kombinasi yang mana yang
sebaiknya dipilih?



"Don't Care"

- Kondisi *don't care* (ditulis sebagai d, X atau / 0) adalah bentuk nilai Keluaran yang level-nya "tidak didefinisikan " (boleh dianggap/dibaca sebagai "0" atau "1"; tetapi bukan "0" dan bukan pula "1").
- Kapan berharga "0" dan kapan berharga "1", ditentukan pada saat penggabungan sel, dengan tujuan supaya penggabungan sel akan dapat menghasilkan persamaan Keluaran yang paling sederhana.



"Don't Care" (lanjutan)

- Pada contoh berikut, terlihat dengan jelas sel "don't care" yang **boleh** dianggap sama dengan "1" dan yang **harus** dianggap sebagai "0"

T AB	CD			
	00	01	11	10
00	0	X	0	0
01	X	1	1	X
11	0	1	X	X
10	X	X	0	0

Apa yang akan didapat bila

- *semua "X" dianggap sebagai "1", atau*
- *semua "X" dianggap sebagai "0" ?*
- *samakah hasil akhir persamaan yang diperoleh ?*



"Don't Care" (lanjutan)

- Pada contoh berikut, tentukan terlebih dahulu gabungan yang mutlak harus dipilih, kemudian pilih kombinasi gabungan lainnya untuk memperoleh hasil yang paling sederhana

T AB	CD 00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	1	0	0
11	1	0	0	X
10	1	X	1	1

$T =$



"Don't Care" (lanjutan)

- Tentukan persemaan Keluaran yang paling sederhana dari contoh soal di bawah ini.

$T =$

$T \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	X	X	1
11	0	1	1	X
10	1	1	0	0



SOP dan *POS*

SOP = Sum Of Products (jumlah dari perkalian)

POS = Product Of Sums (perkalian dari jumlah)

Penulisan persamaan Keluaran dalam bentuk:

$$T = \dots + \dots + \dots + \dots$$

dikenal sebagai bentuk penulisan *SOP*.

Selain itu dikenal juga penulisan dalam bentuk *POS*, seperti berikut:

$$T = (\dots + \dots)(\dots + \dots)(\dots + \dots)$$

Dengan K-Map, kita bisa memperoleh hasil persamaan Keluaran langsung dalam bentuk *POS*.

Bagaimana caranya?

SOP dan POS (lanjutan)

Perhatikan persamaan berikut:

$$T = A B + C \bar{D} \quad (SOP)$$

Dengan teorema de Morgan akan diperoleh untuk \bar{T} :

$$\bar{T} = \overline{A B + C \bar{D}} = (\bar{A} + \bar{B}).(\bar{C} + D) \quad (POS)$$

Artinya adalah, persamaan $f(ABCD)$ tersebut berlaku untuk $T = 0$

Bagaimana implementasinya pada K-Map?

Bila untuk SOP dicari gabungan dari sel-sel bernilai "1", maka untuk POS dicari gabungan dari sel bernilai "0".



SOP dan POS (lanjutan)

Perhatikan soal berikut. Tentukan terlebih dahulu gabungan dari sel “0” (termasuk kemungkinan pemanfaatan sel “X”). Kemudian tuliskan persamaannya (untuk T=0) seperti pada SOP.

T	CD			
AB \	00	01	11	10
00	1	1	X	0
01	1	X	1	1
11	1	0	X	X
10	1	X	0	X

$$\bar{T} = A D + \bar{B} C, \text{ atau}$$

$$T = \overline{A D + \bar{B} C}$$

dengan de Morgan
persamaan tersebut
dapat ditulis menjadi:

$$T = (\bar{A} + \bar{D})(B + \bar{C})$$

Dapatkah saudara menuliskan persamaan tersebut langsung dari K-Map tanpa mempergunakan teorema de Morgan?



Soal-soal K-Map



Untuk menyederhanakan penulisan dan mempermudah proses pemetaannya, soal K-Map sering dituliskan dengan menuliskan nilai desimal dari koordinat sel-sel yang ada.

F AB	CD			
	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Untuk *SOP* (nilai "1" dan "X"):

$$T = \Sigma (1,3,4,5,9,13,15) + d (7,8,10)$$

atau

$$T = m (1,3,4,5,9,13,15) + d (7,8,10)$$

Untuk *POS* (nilai "0" dan "X"):

$$T = \Pi (0,2,6,11,12,14) + d (7,8,10)$$

atau

$$T = M (0,2,6,11,12,14) + d (7,8,10)$$



Soal-soal K-Map (lanjutan)

1. $T = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{B}C + \bar{A}B$

2. $T = \overline{(C+D)} + \bar{A}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}CD + AC\bar{D}$

3. $T = \Sigma(1,3,4,5,6,7,9,11,14) + d(12, 15)$

4. $T =$

5. $T =$

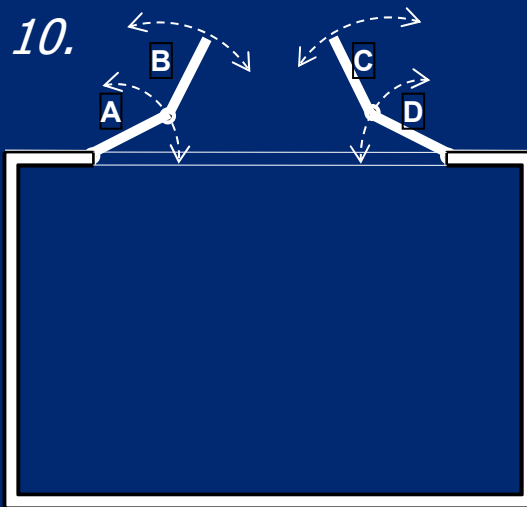
6. $T =$

7. $T =$

8. $T =$

9. $T =$

Soal-soal K-Map (lanjutan)



Sebuah ruangan memiliki 4 buah pintu (A, B, C, dan D) dengan susunan engsel seperti gambar di samping.

Di tiap pintu terpasang sensor yang akan memberikan Masukan "1" bila pintu terbuka dan "0" bila pintu tertutup.

Susun Rangkaian digital yang akan memberikan Keluaran "1" bila ada 1, 2, atau 3 buah daun pintu yang terbuka, yang akan menyalakan lampu.

Bila semua pintu tertutup atau semua pintu terbuka Keluaran berharga "0" atau lampu padam.

Gunakan K-Map untuk menyederhanakan rangkaian.



Ada Pertanyaan?

TERIMA KASIH