



Telkom University

VT11H3-

SISTEM DIGITAL

Kuliah #4

ALJABAR BOOLEAN

Denny Darlis

Program Studi D3 Teknologi Telekomunikasi

Fakultas Ilmu Terapan - Universitas Telkom

Semester Genap 2020/2021

Outline

- Pendahuluan
- Aksioma dalam Aljabar Boole
- Prinsip Dualitas Aljabar Boole
- TEOREMA DeMorgan
- CANONICAL SUM of PRODUCT (SoP)
- CANONICAL PRODUCT of SUM (PoS)

Tujuan Perkuliahan

- Memahami Aljabar Boolean dan Operasinya
- Memahami Sintesis dan Analisis Rangkaian SOP dan POS



PENDAHULUAN

- Pada tahun 1849, George Boole mempublikasikan skema aljabar untuk mendeskripsikan proses yang berhubungan dengan pendekatan logika.
- Selanjutnya aljabar ini populer sebagai aljabar boole.
- Pada awal tahun 1930 Claude Shannon menunjukkan bahwa aljabar boole mampu digunakan untuk deskripsi rangkaian logika.
- Pada bagian ini akan ditunjukkan kegunaan aljabar boole dalam hal desain dan analisis rangkaian logika.

Aksioma dalam Aljabar Boole

$$1a. 0 \cdot 0 = 0$$

$$1b. 1 + 1 = 1$$

$$2a. 1 \cdot 1 = 1$$

$$2b. 0 + 0 = 0$$

$$3a. 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$3b. 1 + 0 = 0 + 1 = 1$$

$$4a. \text{ Jika } x = 0, \text{ maka } \overline{x} = 1$$

$$4b. \text{ Jika } x = 1, \text{ maka } \overline{x} = 0$$



Teorema Variable Tunggal

$$5a. x \cdot 0 = 0$$

$$5b. x + 1 = 1$$

$$6a. x \cdot 1 = x$$

$$6b. x + 0 = x$$

$$7a. x \cdot x = x$$

$$7b. x + x = x$$

$$8a. x \cdot \bar{x} = 0$$

$$8b. x + \bar{x} = 1$$

$$9. \overline{\bar{x}} = x$$

Denny Darlis - 2014/2015



Prinsip Dualitas Aljabar Boole

- Dualitas Ekspresi Boolean diperoleh dengan mengganti operator AND dengan ekuivalen operator OR, dan operator OR dengan ekuivalen operator AND, bit '0' dengan ekuivalen bit '1', dan bit '1' dengan bit '0'.
- Prinsip ini akan berguna dalam manipulasi aljabar boole dalam penyederhanaan rangkaian logika.



SIFAT DUA dan TIGA VARIABLE (1)

$$10a. x \cdot y = y \cdot x$$

$$10b. x + y = y + x$$

Commutative

$$11a. x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$11b. x + (y + z) = (x + y) + z$$

Associative

$$12a. x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$12b. x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$$

Distributive

$$13a. x + x \cdot y = x$$

$$13b. x \cdot (x + y) = x$$

Absorptive





SIFAT DUA dan TIGA VARIABLE (2)

$$14a. x \cdot y + x \cdot \bar{y} = x$$

} Combining

$$14b. (x + y) \cdot (x + \bar{y}) = x$$

$$15a. x \cdot y = \overline{\bar{x} + \bar{y}}$$

} Teorema DeMorgan

$$15b. \overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$



EKIVALEN SIMBOL

$$\overline{\overline{X}} = X'$$
$$\overline{X} = (X'')$$

Contoh Pembuktian Teorema Aljabar Boole Berdasarkan Aksioma Dan Teorema Variable Tunggal :



1. Buktikan teorema : $X \cdot Y + X \cdot Y' = X$

Sifat Distributive : $X \cdot Y + X \cdot Y' = X \cdot (Y + Y')$

Sifat Komplemen : $X \cdot (Y + Y') = X \cdot (1)$

Sifat Identitas : $X \cdot (1) = X$

2. Buktikan teorema : $X + X \cdot Y = X$

Sifat Identitas $X + X \cdot Y = X \cdot 1 + X \cdot Y$

Sifat distributive $X \cdot 1 + X \cdot Y = X \cdot (1 + Y)$

identitas $X \cdot (1 + Y) = X \cdot (1)$

identitas $X \cdot (1) = X$



TEOREMA DeMorgan

$$(X + Y)' = X' \cdot Y'$$

Gerbang NOR equivalent dengan
Gerbang AND yang inputnya dikomplemen

| X | Y | \bar{X} | \bar{Y} | $\overline{X+Y}$ | $\overline{X \cdot Y}$ |
|---|---|-----------|-----------|------------------|------------------------|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$(X \cdot Y)' = X' + Y'$$

Gerbang NAND equivalent dengan
Gerbang OR yang inputnya dikomplemen

| X | Y | \bar{X} | \bar{Y} | $\overline{X \cdot Y}$ | $\overline{X + Y}$ |
|---|---|-----------|-----------|------------------------|--------------------|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Teorema DeMorgan dapat digunakan mengkonversi pernyataan AND/OR menjadi pernyataan OR/AND

Contoh: $Z = A' B' C + A' B C + A B' C + A B C'$

$$Z' = (A + B + C') \cdot (A + B' + C') \cdot (A' + B + C') \cdot (A' + B' + C)$$



TABEL KEBENARAN (TRUTH TABLE)

Suatu Tabel Kebenaran dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi Boolean

Sebuah tabel kebenaran dapat dinyatakan dalam dua bentuk fungsi boolean yang ekuivalen

Fungsi-fungsi persamaan yang diperoleh dari suatu tabel kebenaran disebut sebagai canonical form.

Sum of Products Form

Disebut juga disjunctive normal form, merupakan ekspansi Bagian minterm tabel kebenaran

| A | B | C | F | \bar{F} | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
|---|---|---|---|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | | | | | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | | | | | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | | | | | |

$F = A'BC + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC$

$F' = A'B'C' + A'B'C + A'BC'$

CANONICAL SUM of PRODUCT (SoP)



Sum of Products

| A | B | C | Minterms |
|---|---|---|--|
| 0 | 0 | 0 | $\overline{A}\overline{B}\overline{C} = m_0$ |
| 0 | 0 | 1 | $\overline{A}\overline{B}C = m_1$ |
| 0 | 1 | 0 | $\overline{A}B\overline{C} = m_2$ |
| 0 | 1 | 1 | $\overline{A}BC = m_3$ |
| 1 | 0 | 0 | $A\overline{B}\overline{C} = m_4$ |
| 1 | 0 | 1 | $A\overline{B}C = m_5$ |
| 1 | 1 | 0 | $ABC\overline{C} = m_6$ |
| 1 | 1 | 1 | $ABC = m_7$ |

F dalam bentuk SoP :

$$F(A,B,C) = \sum m(3,4,5,6,7)$$

$$= m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$= A'BC + A'B'C' + A'B'C$$

$$+ ABC' + ABC$$

Penyederhanaan dengan Aljabar Boole :

$$F = A'B'(C + C') + A'BC +$$

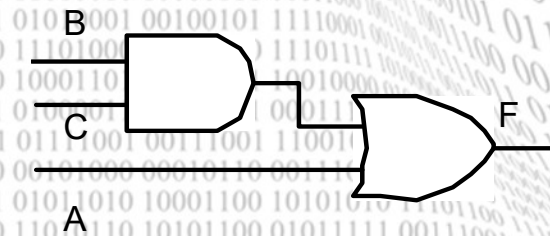
$$AB(C' + C)$$

$$= A'B' + A'BC + AB$$

$$= A(B' + B) + A'BC$$

$$= A + A'BC$$

$$= A + BC$$



Realisasi Hasil Penyederhanaan Fungsi SoP

CANONICAL PRODUCT of SUM (PoS)

Product of Sums / Conjunctive Normal Form / Maxterm Expansion

| A | B | C | Maxterms |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $A + B + \underline{C} = M_0$ |
| 0 | 0 | 1 | $A + \underline{B} + C = M_1$ |
| 0 | 1 | 0 | $A + \underline{B} + \underline{C} = M_2$ |
| 0 | 1 | 1 | $\underline{A} + B + C = M_3$ |
| 1 | 0 | 0 | $\underline{A} + B + \underline{C} = M_4$ |
| 1 | 0 | 1 | $\underline{A} + \underline{B} + C = M_5$ |
| 1 | 1 | 0 | $\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} = M_6$ |
| 1 | 1 | 1 | $A + B + C = M_7$ |

Bentuk Maxterm :

Tentukan baris pada tabel kebenaran dengan $F = 0$.
 '0' pada kolom input merupakan notasi Masukan tanpa komplemen.
 '1' pada kolom input merupakan notasi Masukan dengan komplemen.

Hasil pembacaan fungsi boolean PoS berdasarkan tabel kebenaran :

$$F(A,B,C) = \prod M(0,1,2)$$

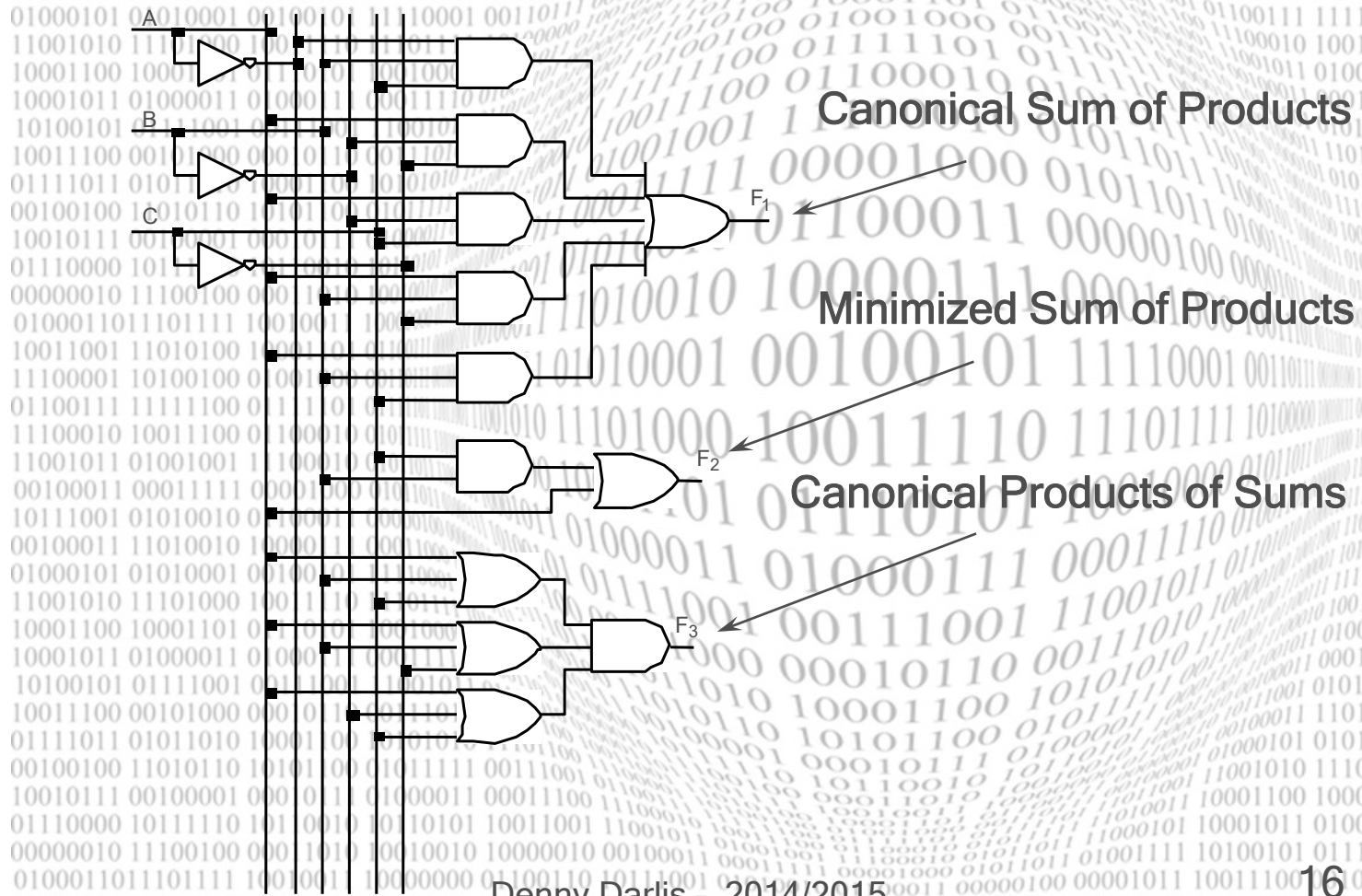
$$= (A + B + C) (A + B + C') (A + B' + C)$$

$$F'(A,B,C) = \prod M(3,4,5,6,7)$$

$$= (A + B' + C') (A' + B + C) (A' + B + C') (A' + B' + C) (A' + B' + C')$$



PERBANDINGAN HASIL REALISASI





Ada Pertanyaan?

TERIMA KASIH